Метод изогональных прямых

И.КУШНИР

Для человеческого разума симметрия обладает, по-видимому, совершенно особой притягательной силой.

Р.Фейнман

Изогональными называются прямые, которые проходят через вершину треугольника и симметричны относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, имеющей с прямыми общую точку (рис.1). Этими прямыми занимались Птолемей, Брахмагупта, Лежандр, Лагранж, Штейнер и многие другие. Мы рассмотрим два вида изогональных прямых (*изогоналей*): первый – ортоизогональные, второй – все остальные.

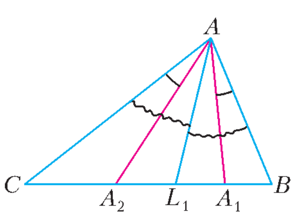


Рис. 1

Заметим, что биссектриса внутреннего угла треугольника изогональна сама себе.

Ортоизогональные прямые

Ортоизогональными прямыми мы назовем две изогонали, из которых одна – высота треугольника.

Теорема 1 (главная). *Для того, чтобы прямая была изогональна высоте треугольника, необходимо и достаточно, чтобы ей принадлежал центр O окружности, описанной около треугольника.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть высота AH_1 (рис.2) изогональна прямой AA_1, которая пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке D. Поскольку $\angle ADC = \angle ABH_1$, то $\angle ACD = 90°$, значит, AD – диаметр.

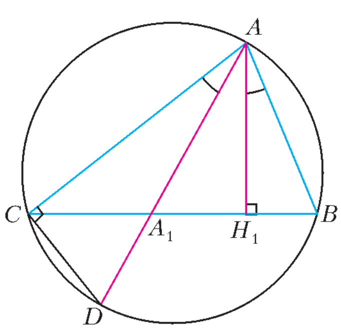


Рис. 2

Достаточность. Диаметр AD и высота AH_1 изогональны, так как $\angle CDA = \angle ABC$.

Задача 1. *Докажите, что прямая OA, где O – центр описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна отрезку H_2H_3 (H_2 и H_3 – основания высот, проведенных из вершин B и C).*

Решение. Разберем случай остроугольного треугольника ABC. Четырехугольник CH_2H_3B (рис.3) вписан в окружность с диаметром BC (поскольку углы BH_2C и CH_3B прямые). Тогда угол AH_2H_3, дополнительный к углу CH_2H_3, равен углу ABC (противоположному к углу CH_2H_3), и поскольку отрезки OA и AH_1 изогональны, $\angle H_2TA = 90°$, где T – точка пересечения прямой OA с отрезком H_2H_3.

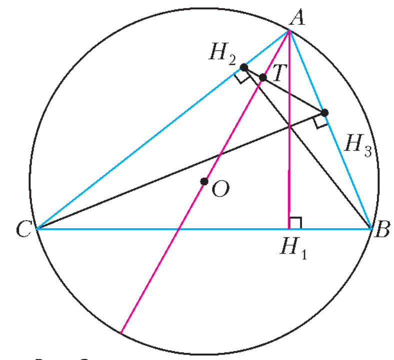


Рис. 3

Три задачи как одна

Задача 2. Для того чтобы треугольник был прямоугольным или равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы медиана и высота, проведенные из какой-то одной вершины, были изогональны. Докажите это.

Задача 3. Определите углы треугольника, в котором биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части.

(*Ответ*: $\angle BAC = 90°$, $\angle ACB = 22°30'$.)

Задача 4. Определите углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части.

(*Ответ*: $\angle BAC = 90°$, $\angle B = 60°$.)

Задачи 2, 3, 4 решаются с помощью главной теоремы.

Ортоизогонали и проекция точки на две стороны треугольника, когда она движется по третьей

Пусть точка X движется по стороне BC (рис.4). Обозначим через M и N проекции точки X на стороны AC и AB. Заметим, что точки A, M, X, N, H_1 принадлежат одной окружности – назовем ее γ_X.

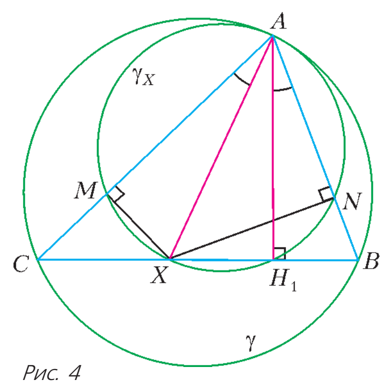


Рис. 4

Задача 5. *Чтобы окружности γ_X и γ – окружность, описанная около треугольника ABC – внутренне касались, необходимо и достаточно ортоизогональности отрезков AX и AH_1.*

Действительно, в этом случае вершина A и центры окружностей γ_X и γ принадлежат одной прямой.

Задача 6. *Чтобы отрезки AX и AH_1 были ортоизогональны, необходимо и достаточно, чтобы отрезок MN был параллелен стороне BC.*

Решение. Отрезки AX и AH_1 ортоизогональны тогда и только тогда, когда равны дуги H_1N и MX, что равносильно параллельности отрезков MN и XH_1 (рис.5).

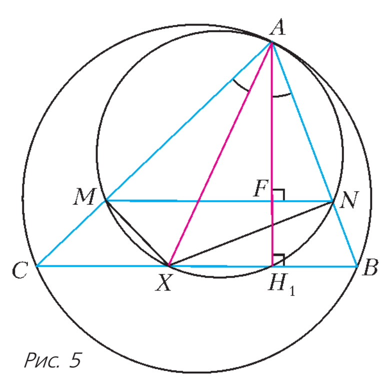


Рис. 5

Основная формула. *Если отрезки AX и AH_1 ортоизогональны, то площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле*

$$S = \frac{1}{2} AA_0 \cdot MN,$$

где A_0 – точка пересечения прямой AH_1 с опи-

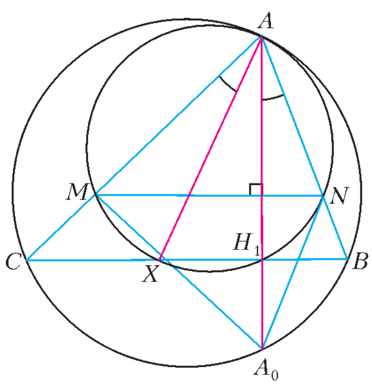


Рис. 6

санной около треугольника ABC окружностью.

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник ANA_0M (рис.6). Поскольку его диагонали AA_0 и MN перпендикулярны ($MN \parallel BC$), то его площадь равна половине их произведения: $\frac{1}{2}AA_0 \cdot MN$. Докажем, что этот четырехугольник равновелик треугольнику ABC.

В самом деле, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH_1 \cdot BC$. По задаче 5, окружности γ_X и γ касаются в точке A, а значит, гомотетичны с центром в точке A. При этой гомотетии M, H_1 и N переходят в точки C, A_0 и B соответственно. Отсюда $\frac{AH_1}{AA_0} = \frac{MN}{BC}$, и значит, $AH_1 \cdot BC = AA_0 \cdot MN$.

Общий случай изогональных прямых

Рассмотрим пары изогональных отрезков, не обязательно являющихся ортоизогональными.

Теорема 2. *Если отрезки AA_1 и AA_2 изогональны, а треугольник ABC вписан в окружность, то существуют два «изогональных подобия» треугольников (рис.7) –*

первое:

$$\Delta ABA_0 \sim \Delta AA_2C;$$

второе:

$$\Delta CAA_0 \sim \Delta AA_2B.$$

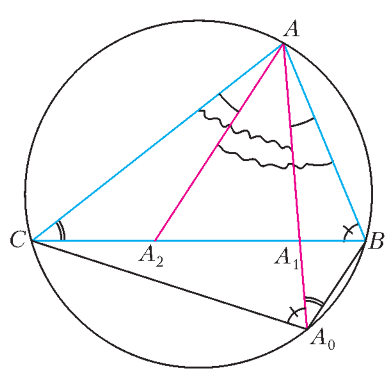


Рис. 7

Покажем применение теоремы 2.

Задача 7. *Докажите формулу биссектрисы $l_a^2 = bc - mn$, где $l_a = AL_1$, L_1 – основание биссектрисы, проведенной из вершины A, $m = BL_1$, $n = CL_1$.*

Решение. Поскольку биссектриса изогональна сама себе, достаточно одного изогонального подобия: $\Delta ABW \sim \Delta AL_1C$ (рис.8);

$$\frac{l_a + L_1W}{b} = \frac{c}{l_a}; \quad l_a^2 + l_a \cdot L_1W = bc, \; l_a^2 = bc - l_a \cdot L_1W.$$

Поскольку $l_a \cdot L_1W = mn$ (произведение отрезков хорд), то $l_a^2 = bc - mn$.

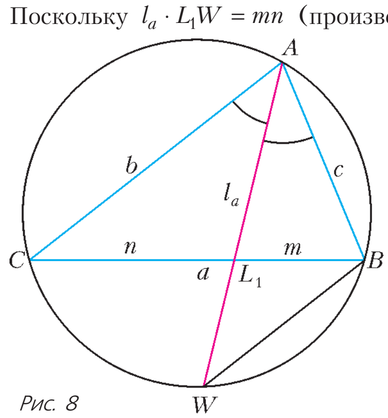


Рис. 8

Задача 8. *Докажите основную формулу*

$$S = \frac{1}{2}AW \cdot MN,$$

где S – площадь треугольника ABC, W – точка пересечения биссектрисы AL_1 с окружностью, описанной около треугольника ABC, M и N – проекции точки L_1 на стороны AC и AB.

Решение. Применив изогональное подобие треугольников AWB и ACL_1 (рис.9), получим $AW \cdot l_a = bc$. Домножив обе части равенства на $\frac{1}{2}\sin\angle A$, имеем

$$\frac{1}{2}AW \cdot l_a \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A.$$

Поскольку $l_a \cdot \sin\angle A = MN$ (докажите!), то $S = \frac{1}{2}AW \cdot MN$, что и требовалось доказать.

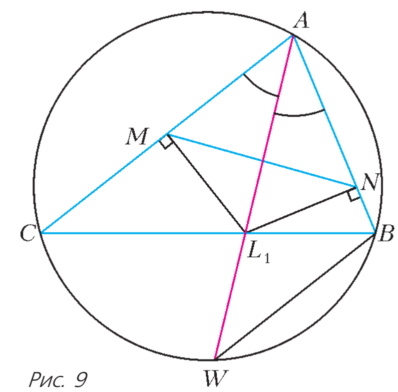


Рис. 9

Задача 9. *Пусть точка F принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника ABC, X – точка на стороне BC. Прямые AX и AF изогональны. Точки M и N – проекции точки X на стороны AC и AB. Докажите, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}AF \cdot MN$.*

Указание: воспользуйтесь теоремой 2 и учтите, что $MN = AX \cdot \sin\angle BAC$.

Задача 10. *Докажите теорему Птолемея: пусть a, b, c, d – стороны вписанного четырехугольника, d_1, d_2 – его диагонали (рис.10); тогда $ac + bd = d_1 \cdot d_2$.*

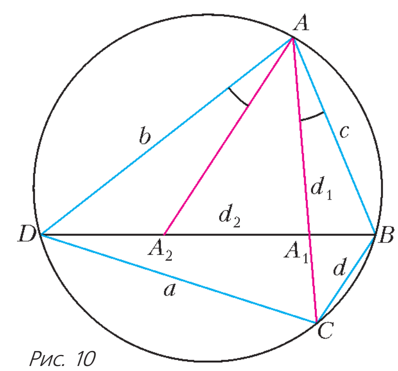


Рис. 10

Решение. Обозначим через A_1 точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Построим отрезок AA_2, изогональный отрезку AA_1, и применим два изогональных подобия:

$$\Delta ABC \sim \Delta AA_2D, \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DA_2}{BC},$$

или

$$AC \cdot DA_2 = AD \cdot BC; \qquad (1)$$

$$\Delta DAC \sim \Delta A_2AB, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{A_2B},$$

или

$$AC \cdot A_2B = AB \cdot DC. \qquad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2):

$$AC(DA_2 + A_2B) = AD \cdot BC + AB \cdot DC,$$

или

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$$

($d_1 \cdot d_2 = ac + bd$), что и требовалось доказать.

Теорему Птолемея теперь можно запомнить как *два изогональных подобия.*

Полвека назад я восторженно воскликнул: «Биссектриса любит окружность!» Только теперь я понял почему: она изогональна сама себе.

Чудеса инверсии

Т.ЕМЕЛЬЯНОВА

Речь пойдет о том, как с помощью инверсии одна задача может превратиться либо в одну из самых красивых теорем планиметрии (это будет теорема Веррьера), либо в одно из самых простых утверждений школьного курса.[1]

Задача. *Три окружности ω_1, ω_2 и ω_3 радиуса r проходят через точку S и касаются внутренним образом окружности ω радиуса R ($R > r$) в точках T_1, T_2 и T_3 соответственно. Докажите, что прямая T_1T_2 проходит через вторую (отличную от S) точку пересечения окружностей ω_1 и ω_2.*

Решение. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O центры окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$ соответственно. Докажем, что точки S и O совпадают. Из касания ω_1 и ω следует, что точки O, O_1, T_1 лежат на одной прямой, причем $OO_1 = OT_1 - O_1T_1 = R - r$ (рис. 1). Аналогично, $OO_2 = OO_3 = R - r$, поэтому O – центр окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Поскольку $SO_1 = SO_2 = SO_3 = r$, точка S также является центром окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Отсюда следует, что точки S и O совпадают.

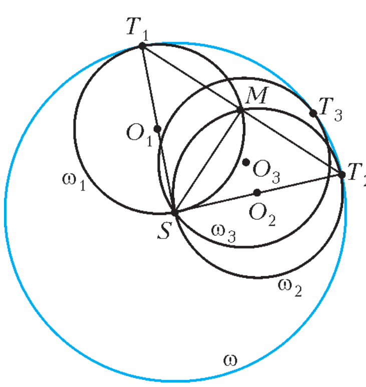


Рис. 1

Пусть M – середина отрезка T_1T_2. Так как OM – медиана и высота равнобедренного треугольника OT_1T_2, то M лежит на окружности, построенной на OT_1 как на диаметре, т.е. M лежит на ω_1. Аналогично, M лежит на ω_2.

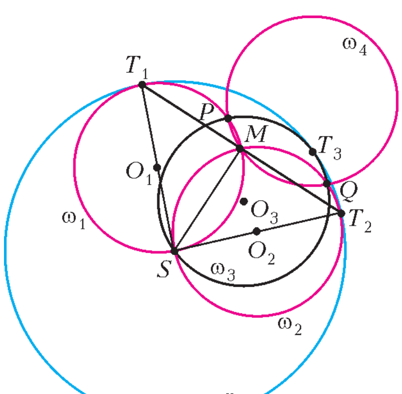


Рис. 2

А теперь приступим к превращениям.

Превращение 1. Дополним рисунок 1 некоторыми элементами. Оставшиеся точки пересечения окружностей назовем P и Q, а окружность, проходящую через точки P, Q, M, назовем ω_4 (рис.2). Радиус этой окружности равен $r = \frac{R}{2}$, поскольку она проходит через середины сторон треугольника $T_1T_2T_3$. Произведем инверсию относительно некоторой окружности ω_0 с центром в точке M. Для большей наглядности образы точек при инверсии будем обозначать теми же буквами. При этом окружности ω_1, ω_2 и ω_4 (красные) перейдут в прямые ST_1, ST_2 и PQ (красные) соответственно, окружность ω_3 (черная) перейдет в окружность, на которой лежат точки P, Q, S, и окружность ω (синяя) также останется окружностью (рис.3). Прямая SM, делящая пополам угол между равными окружностями ω_1 и ω_2, станет биссектрисой угла S треугольника PQS. Аналогично для прямых PM и QM. Таким образом, точка M будет центром вписанной окружности треугольника PQS.[2] Осталось сформулировать утверждение, вытекающее из утверждения задачи.

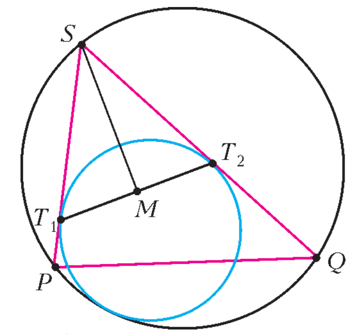


Рис. 3

Теорема Веррьера. *Пусть окружность, касающаяся описанной окружности треугольника SPQ, касается также его сторон SP и SQ в точках T_1 и T_2 соответственно. Тогда центр окружности, вписанной в треугольник SPQ, лежит на прямой T_1T_2.*

Превращение 2. Произведем инверсию рисунка 2 относительно окружности ω (S – ее центр). Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 перейдут в прямые и образуют треугольник PQM, для которого ω – вневписанная окружность (рис.4). Утверждение задачи превращается в следующее

Утверждение. *Вершина треугольника, центр вневписанной окружности и точки касания ее с продолжениями сторон, выходящими из этой вершины, лежат на одной окружности.*

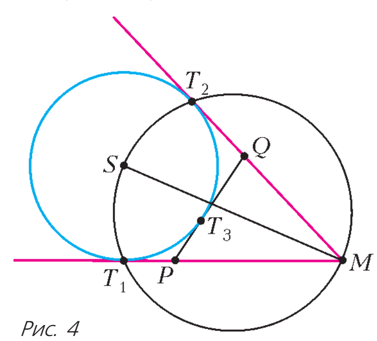


Рис. 4

Для доказательства достаточно рассмотреть окружность с диаметром SM (см. рис.4).

В заключение заметим, что это последнее простое **Утверждение** и **Теорема Веррьера** с точки зрения инверсии оказались в каком-то смысле эквивалентными[3]. Берем **Утверждение**, пара преобразований инверсии – и «готова» **Теорема**!

[1] *Об инверсии можно прочитать, например, в статье В.Арнольда «Инверсия в цилиндрических зеркалах метро» в «Кванте» №5 за 2010 год или, более подробно, в статье В.Уроева «Инверсия» в «Кванте» №5 за 1984 год.*

[2] *Этот факт можно доказать и по-другому: поскольку окружности ω_1, ω_2 и ω_4 одинакового радиуса, их образы (красные прямые) будут на одинаковом расстоянии от точки M. Значит M – центр вписанной или вневписанной окружности треугольника PQS. Подумайте, почему для данного положения окружностей имеет место именно случай вписанной окружности. (Прим. ред.)*

[3] *Все утверждения статьи опираются на конкретные взаимные расположения окружностей, представленные на рисунках. Подумайте, какие еще интересные утверждения можно получить, изменяя положения окружностей.*

Электричество из фруктов

Э.МАРЧУК

Что такое химический источник тока

На сегодняшний день мы не можем представить свою жизнь без электричества. Наиболее распространенными источниками тока являются химические, в которых химическая энергия окислительно-восстановительной реакции преобразуется в электрическую. Первый химический источник тока был изобретен в 1800 году итальянским ученым Алессандро Вольта.

Область применения химических источников тока чрезвычайно широка – от миниатюрных элементов питания кардиостимуляторов до водородных топливных батарей, обеспечивающих энергией космические корабли. Без химических источников тока сегодня было бы невозможным не только использование разнообразной бытовой техники от плеера до мобильного телефона, но и обеспечение работы сложнейших приборов и компьютерной техники. Даже некоторые виды современного оружия приводятся в действие от сигнала, обеспечиваемого электрической батарейкой.

Основу химических источников тока составляют два металлических электрода: катод, содержащий окислитель, и анод, содержащий восстановитель, контактирующие с электролитом. Между электродами устанавливается разность потенциалов — электродвижущая сила, соответствующая свободной энергии окислительно-восстановительной реакции. Действие химических источников тока основано на двух пространственно разделенных процессах: при замкнутой внешней цепи на катоде происходит реакция окисления, образующиеся свободные электроны переходят по внешней цепи к аноду, где они участвуют в реакции восстановления.

Делаем батарейку из фруктов и овощей

Существует множество способов создать химический источник тока, однако наиболее просто и интересно получить электрическую энергию из обычных фруктов и овощей. Сок фруктов и овощей содержит соли и органические кислоты. Водород и кислород, содержащиеся в них, являются хорошими окислителями, т.е. при взаимодействии со многими металлами они отбирают у них электроны. Способность отдавать или присоединять электроны для различных металлов можно посмотреть в так называемом электрохимическом ряду в любом учебнике по химии или в справочнике.

Для изготовления источника тока необходимо выбирать в качестве электродов металлы, как можно более различающиеся по своим окислительно-восстановительным свойствам. В этом можно убедиться в ходе следующего эксперимента.

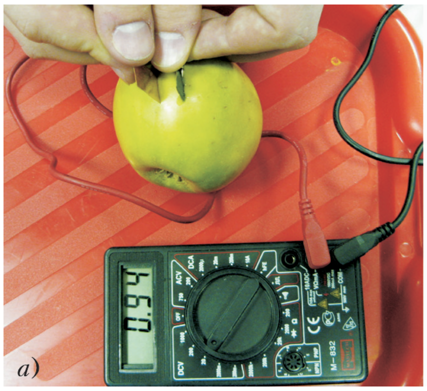
Вырежьте из медной фольги толщиной 0,2 – 1 мм две пластинки шириной 1 см и длиной около 1,5 – 2 см. (А можно использовать и обычную медную или покрытую медью монету.) Аналогично сделайте подобные пластинки из других металлов: стали, оцинкованного железа (например, вырежьте пластинку из старого оцинкованного ведра) и т.д. Получившиеся электроды необходимо хорошо зачистить и желательно заострить один конец у каждой пластины. Приготовьте несколько фруктов и овощей, например яблоко, картофель, лимон, апельсин, помидор и т.п. Вставляя в каждый фрукт различные пары изготовленных электродов, измеряйте напряжение с помощью вольтметра, цифрового мультиметра или авометра. Сравните напряжение на клеммах при использовании электродов из одного и того же металла и напряжение на клеммах электродов из различных металлов. Как показывает опыт, напряжение на клеммах из одинаковых электродов практически отсутствует, а максимальное напряжение наблюдается на клеммах медно-цинковой пары.

Поэкспериментируем с фруктовой батарейкой

Можно провести еще несколько экспериментов с фруктовыми батарейками. Для начала попробуйте предположить, от чего будет зависеть напряжение на клеммах источников, и выберите фрукт, который, по-вашему мнению, должен дать максимальное напряжение с медно-цинковой парой. Вероятно, вы подумали о лимоне или апельсине. Каково будет ваше удивление, когда вы обнаружите, что из перечисленных выше фруктов и овощей максимальное напряжение дает яблоко. У лимона действительно наиболее кислая среда и, казалось бы, скорость химической реакции должна быть выше. Однако в соке яблока содержится больше различных кислот.

Но не нужно делать поспешных выводов. Не только напряжение на клеммах является характеристикой батарейки. Более важный параметр – это максимальная мощность источника, которая зависит от его внутреннего сопротивления. Здесь вас также ожидает сюрприз. Расположите электроды на расстоянии 1 см друг от друга и измерьте напряжение на клеммах, а затем проведите аналогичное измерение при расстоянии между электродами 4 – 6 см (рис.1). Измеренное напряжение оказывается одним и тем же.

Независимость напряжения на клеммах химического источника тока от расстояния между электродами возможна лишь в том случае, когда внутри самого источника электрический ток не протекает. Таким образом, напряжение на клеммах зависит только от скорости химических реакций на



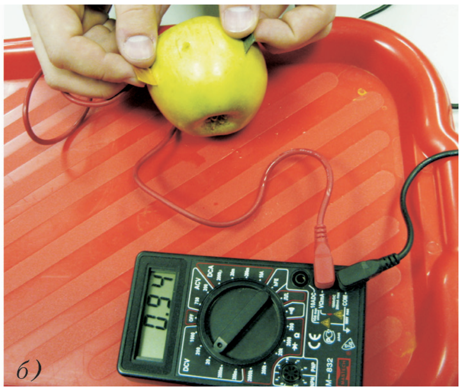


Рис. 1. Независимость напряжения фруктовой батарейки от расстояния между электродами

аноде и катоде, которая определяется выбором материалов электродов, а также электролитом, содержащимся в соке. Немаловажную роль при этом играет чистота поверхности электродов, поэтому перед проведением экспериментов необходимо с помощью мелкой наждачной бумаги тщательно удалить с поверхности электродов оксидную пленку. Удаление оксидной пленки позволит также уменьшить так называемый поляризационный эффект, который уменьшает фактическую ЭДС источника.

Из закона Ома для полной цепи следует, что сила тока максимальна в режиме короткого замыкания источника, когда сопротивление внешней нагрузки стремится к нулю. Миллиамперметр обладает ничтожно малым внутренним сопротивлением, и при подключении прибора непосредственно к клеммам фруктовой батарейки можно с большой точностью говорить о коротком замыкании. Измерение силы тока при этом необходимо провести как можно быстрее, поскольку источник быстро разряжается.

Рассчитать максимальную мощность имеющихся у вас фруктовых источников тока можно по формуле $P_{\max} = UI_{\max}$. На рисунке 2 приведена сравнительная диаграмма мощностей различных фруктовых батареек с медно-цинковой парой электродов. Значения, приведенные на диаграмме, не следует воспринимать как абсолютные, но у вас должна получиться примерно такая же картина. Таким образом, мощность

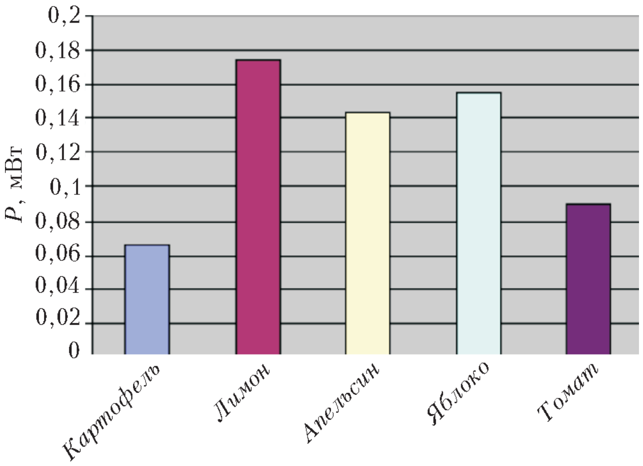


Рис. 2. Сравнительная диаграмма максимальных мощностей батареек

лимонной батарейки выше, а значит, из перечисленных фруктовых источников тока она обладает наилучшими электрическими характеристиками.

Отсутствие тока внутри отключенной фруктовой батарейки объясняется особенностями окислительно-восстановительных химических реакций, за счет которых возникает напряжение на электродах. В результате химической реакции под действием фруктового сока ионы цинка покидают поверхность цинкового электрода, и цинковый электрод приобретает отрицательный потенциал относительно раствора. Химическая реакция не зависит от присутствия в соке другого электрода. С медным электродом происходит аналогичная реакция, но, согласно электрохимическому ряду, с меньшей интенсивностью. Таким образом, между цинковым и медным электродами устанавливается разность потенциалов. При замыкании клемм источника электроны устремляются через внешнюю цепь от цинка к меди. Именно поэтому во всех случаях медный электрод являлся анодом, а цинковый – катодом.

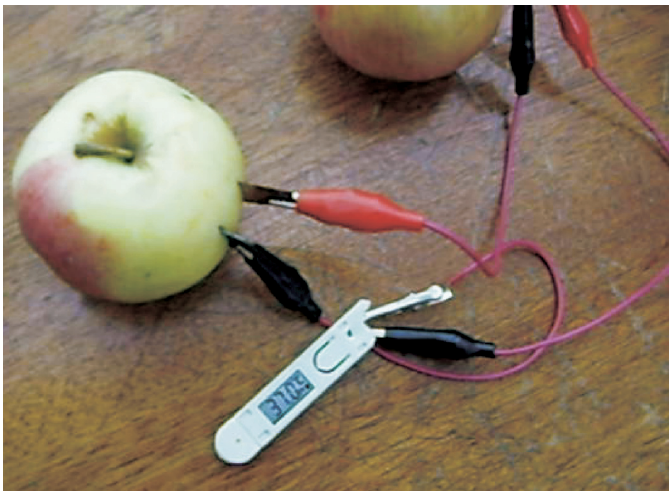


Рис. 3. Иллюстрация работы электронного термометра от фруктовых батареек

Вырывание в ходе химической реакции из металла ионов соответствующего химического элемента неизбежно приводит к разрушению электродов, которое в данном случае не может быть обратимо. Этим обстоятельством обусловлена невозможность подзарядки фруктовых батареек и, тем самым, невозможность изготовления на их основе аккумуляторов.

Максимальная мощность фруктовой батарейки мала и составляет десятые доли милливатта. Поэтому фруктовая батарейка может быть использована для питания только маломощных приборов, таких как электронные часы, калькулятор, маломощный светодиод и т.п.

Возьмите, например калькулятор и вашу батарейку. Если на калькуляторе имеется встроенная солнечная батарея, то ее необходимо заклеить непрозрачной бумагой. Соедините последовательно в батарею два источника из лимона или яблока и подсоедините к ней (соблюдая полярность) калькулятор. Вы увидите, что калькулятор работает. На рисунке 3 представлена фотография электронного термометра, работающего от батареи источников тока из двух яблок.

Для питания более мощных приборов необходимо будет соединять фруктовые источники тока в батарею. Подумайте, сколько необходимо фруктовых батареек и как их надо соединить для обеспечения работы нетбука Aspire One (с характеристиками 19 В и 1,58 А) или сотового телефона и можно ли сэкономить на количестве фруктов при соединении их в батарею.

Эксперименты с фруктовыми батарейками вы можете продолжить самостоятельно. Попробуйте, скажем, установить зависимость напряжения на клеммах и мощности элемента от площади поверхности электродов или попытайтесь построить разрядные характеристики различных фруктовых источников.

Желаем успехов!

Движение заряженных частиц в магнитном поле

А.ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДУТ РАССМОТРЕНЫ ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ на движущуюся частицу, помимо других сил, действует еще сила Лоренца со стороны магнитного поля. Магнитное поле во всех задачах считается однородным и не зависящим от времени.

Начнем с классической задачи.

Задача 1. *Частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B под углом α к линиям индукции. Найдите траекторию частицы и опишите ее движение.*

Решение. Во-первых, так как сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости, то частица будет двигаться с постоянной скоростью v. Во-вторых, поскольку сила Лоренца направлена перпендикулярно вектору индукции $\vec{B}$, то проекция скорости на ось Z, параллельную $\vec{B}$, будет постоянной и равной $v_z = v\cos\alpha$. Следовательно, движение в перпендикулярной магнитному полю плоскости происходит с постоянной скоростью $v_\perp = v\sin\alpha$ по окружности. Радиус этой окружности $R_\perp$ найдем из второго закона Ньютона в проекции на ось, направленную к центру окружности:

$$qv_\perp B = m\frac{v_\perp^2}{R_\perp}, \text{ и } R_\perp = \frac{mv_\perp}{qB}.$$

При этом период вращения

$$T = \frac{2\pi R_\perp}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}$$

не зависит от величины и направления скорости. Таким образом, частица будет двигаться по винтовой линии (спирали) с шагом

$$h = v_z T = \frac{2\pi m v\cos\alpha}{qB}.$$

Радиус кривизны винтовой линии R можно также найти из второго закона Ньютона:

$$qv_\perp B = m\frac{v^2}{R}, \text{ и } R = \frac{mv}{qB\sin\alpha} = \frac{R_\perp}{\sin^2\alpha}.$$

Следующая задача на движение в магнитном поле в присутствии силы сопротивления среды продемонстрирует метод решения, основанный на установлении связей между изменениями переменных. Этот метод будет использоваться и в некоторых других задачах.

Задача 2. *Частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью v_0 в однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно линиям индукции. На частицу при движении действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости: $\vec{F}_c = -\gamma\vec{v}$. Найдите перемещение частицы до ее остановки, а также путь, пройденный частицей.*

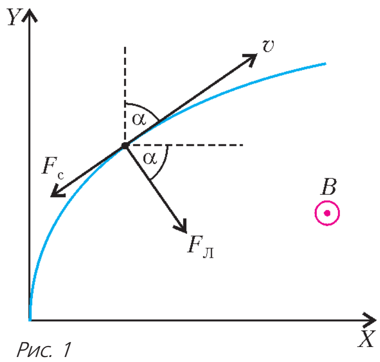


Рис. 1

Решение. Введем координатные оси X и Y, как показано на рисунке 1, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси:

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -F_c\sin\alpha + F_Л\cos\alpha = -\gamma v_x + qv_yB,$$

$$m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -F_c\cos\alpha - F_Л\sin\alpha = -\gamma v_y - qv_xB.$$

Умножив обе части равенств на Δt, получим уравнения, связывающие изменения проекций скорости с изменениями координат:

$$m\Delta v_x = -\gamma\Delta x + qB\Delta y,$$

$$m\Delta v_y = -\gamma\Delta y - qB\Delta x.$$

Проведя суммирование от начального момента до остановки, получим

$$0 = -\gamma x + qBy,$$

$$-mv_0 = -\gamma y - qBx,$$

где x и y – координаты точки остановки. Решая эту систему, найдем

$$x = \frac{qBmv_0}{\gamma^2 + (qB)^2}, \quad y = \frac{\gamma m v_0}{\gamma^2 + (qB)^2}.$$

Отсюда для перемещения частицы получаем

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{mv_0}{\sqrt{\gamma^2 + (qB)^2}}.$$

Чтобы найти путь частицы, запишем второй закон Ньютона в проекции на направление скорости:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\gamma v.$$

Умножая на Δt и суммируя от начального момента до остановки, получим

$$-mv_0 = -\gamma l,$$

откуда находим путь:

$$l = \frac{mv_0}{\gamma}.$$

Как и следовало ожидать, путь оказался больше перемещения.

Далее будут рассмотрены задачи, где, кроме магнитного поля, на частицу будет действовать также однородное электрическое поле или поле тяжести. Хотя оба эти поля действуют на частицу с постоянной силой и их влияние можно считать одинаковым, но, по традиции, одни задачи формулируют с использованием поля тяжести, другие – с использованием электрического поля (хотя одно можно легко заменить на другое). Если про силу тяжести в задаче не говорится, то она (по умолчанию) отсутствует.

Сначала – задача, непосредственно примыкающая к задаче 1.

Задача 3. *Частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно линиям индукции. Кроме магнитного поля, в этой области пространства создано еще однородное электрическое поле, напряженность которого равна E и параллельна вектору магнитной индукции. Найдите траекторию частицы и опишите ее движение.*

Решение. В проекции на ось Z, параллельную $\vec{B}$, частица движется равноускоренно с ускорением $a_z = qE/m$, а в перпендикулярной плоскости – движется по окружности радиусом $R = mv/(qB)$ с периодом $T = 2\pi m/(qB)$. Траектория частицы – спираль постоянного радиуса с увеличивающимся шагом:

$$h_1 = \frac{a_z T^2}{2} = \frac{2\pi^2 mE}{qB^2}, \quad h_2 = 3h_1, \quad h_3 = 5h_1, \ \ldots$$

В следующих задачах движение заряженной частицы не является свободным, но ограничено наличием связи, например нерастяжимой нити или стержня.

Задача 4 (ЕГЭ-2010). *В однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вертикально вниз, равномерно вращается в горизонтальной плоскости против часовой стрелки (если смотреть сверху; рис.2) положительно заряженный шарик массой m, подвешенный на нити длиной l (конический маятник). Угол отклонения нити от вертикали равен α, скорость движения шарика равна v. Найдите заряд шарика.*

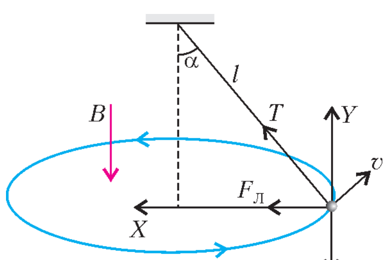


Рис. 2

Решение. При указанном в условии направлении движения шарика сила Лоренца направлена к центру окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось X, направленную от шарика к центру окружности, и на вертикальную ось Y:

$$T\sin\alpha + qvB = m\frac{v^2}{l\sin\alpha},$$

$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

Исключая силу натяжения нити T, получим

$$mg\,\mathrm{tg}\,\alpha + qvB = m\frac{v^2}{l\sin\alpha},$$

откуда найдем заряд шарика:

$$q = \frac{m}{B}\left(\frac{v}{l\sin\alpha} - \frac{g}{v}\mathrm{tg}\alpha\right).$$

Задача 5. *Маленький шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, несет на себе положительный заряд q. Система помещена в электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$ и в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, линии которых горизонтальны и перпендикулярны друг другу (рис.3). Вначале шарик удерживают в нижнем положении, а затем отпускают. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда нить образует с вертикалью угол α.*

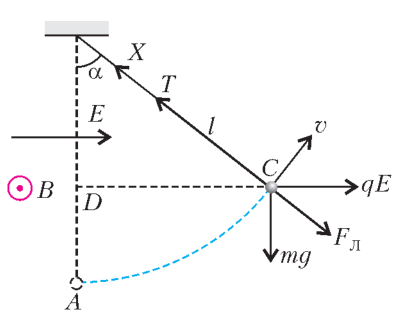


Рис. 3

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X, направленную вдоль нити к центру окружности:

$$T - mg\cos\alpha - qE\sin\alpha - qvB = m\frac{v^2}{l}.$$

Чтобы найти скорость частицы v в рассматриваемый момент, используем теорему об изменении кинетической энергии. Так как работа силы тяжести, а также работа электрической силы не зависит от траектории, заменим дугу окружности на ломаную ADC: сила тяжести совершает работу на участке AD, а электрическая сила – на участке DC. Поскольку работа силы Лоренца равна нулю, теорема об изменении кинетической энергии примет вид

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = qEl\sin\alpha - mgl(1-\cos\alpha).$$

Решая полученные уравнения, находим силу натяжения нити:

$$T = 3qE\sin\alpha - mg(2 - 3\cos\alpha) + qvB,$$

где

$$v = \sqrt{\frac{2qEl\sin\alpha}{m} - 2gl(1-\cos\alpha)}.$$

Теперь рассмотрим несколько задач на свободное (без связей) движение в скрещенных полях. Самый простой случай – это равномерное движение в скрещенных под прямым углом электрическом и магнитном полях, когда сила Лоренца и электрическая сила компенсируют друг друга.

Задача 6. *В области пространства имеются скрещенные под прямым углом электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$ и магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Какой должна быть скорость заряженной частицы, чтобы ее ускорение в этой области было равно нулю?*

Решение. Будем считать заряд частицы положительным. Тогда электрическая сила $\vec{F}_{эл} = q\vec{E}$ направлена вдоль вектора $\vec{E}$. Значит, сила Лоренца должна быть направлена в противоположную сторону (рис.4). Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, вектор скорости $\vec{v}$ должен лежать в плоскости, перпендикулярной силе Лоренца. Чтобы сила Лоренца была направлена в нужную (а не в противоположную) сторону, вектор $\vec{v}$ должен составлять с вектором $\vec{B}$ любой угол $0 < \alpha < 180^\circ$, но отложенный в направлении, указанном на рисунке. Величину скорости найдем из уравнения

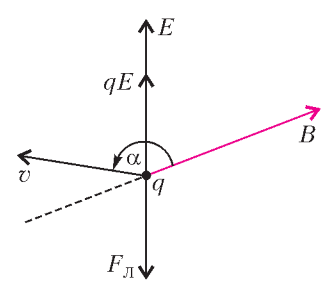


Рис. 4

$$qE = qvB\sin\alpha, \text{ откуда } v = \frac{E}{B\sin\alpha}.$$

Отметим, что такую же скорость может иметь и отрицательно заряженная частица, просто обе силы – и электрическая сила, и сила Лоренца – изменят свои направления на противоположные.

Задача 7. *Частицу с массой m и зарядом $q > 0$ помещают в область пространства, содержащую скрещенные под прямым углом электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$ и* *магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Частицу сначала удерживают на месте, а затем отпускают. Найдите, на какое наибольшее расстояние удалится частица от точки старта в направлении линий электрического поля. Попробуйте описать движение частицы и определить характеристики этого движения.*

Решение. Введем такие координатные оси: ось X – в направлении вектора $\vec{E}$, ось Y – перпендикулярно оси X в направлении отклонения частицы магнитным полем (рис.5).

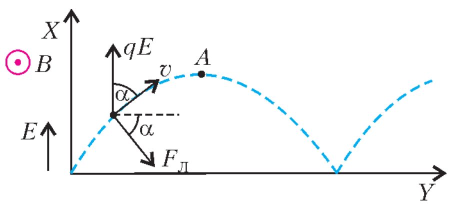


Рис. 5

В проекции на ось Y второй закон Ньютона принимает вид

$$m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = qvB\cos\alpha = qv_xB,$$

где α – угол между скоростью и осью X (см. задачу 2). Умножая обе части уравнения на Δt и суммируя, получим

$$mv_y = qxB. \qquad (1)$$

Запишем теперь закон сохранения энергии:

$$qEx = \frac{mv^2}{2}, \qquad (2)$$

т.е. работа электрического поля равна изменению кинетической энергии частицы (работа силы Лоренца равна нулю). В точке A наибольшего удаления вдоль оси X скорость направлена параллельно оси Y, и уравнение (1) принимает вид

$$mv = qBx.$$

Выражая отсюда скорость и подставляя ее в закон сохранения энергии (2), найдем наибольшее удаление частицы в направлении электрического поля:

$$x = \frac{2mE}{qB^2}. \qquad (3)$$

Для получения дальнейшей информации о движении частицы запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X:

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = qE - qvB\sin\alpha = qE - qv_yB.$$

Умножая на Δt и суммируя, получим

$$mv_x = qEt - qBy. \qquad (4)$$

Обратим внимание, что точки, в которых $v_x = 0$, имеют координату $y = \frac{E}{B}t$, т.е. они удаляются вдоль оси Y со скоростью $V = E/B$.

Для упрощения картины движения перейдем в систему отсчета, которая движется вдоль оси Y со скоростью V. Здесь скорость частицы и ее координата выражаются формулами

$$\tilde{v}_y = v_y - \frac{E}{B},\ \tilde{y} = y - \frac{E}{B}t.$$

Уравнение (4) приобретает вид

$$v_x = -\frac{qB}{m}\tilde{y}, \qquad (5)$$

а с учетом уравнения (1), –

$$\tilde{v}_y = v_y - \frac{E}{B} = \frac{qB}{m}x - \frac{E}{B}. \qquad (6)$$

В этой системе отсчета движение частицы происходит с постоянной скоростью $\tilde{v} = E/B$:

$$\tilde{v}^2 = v_x^2 + \tilde{v}_y^2 = v_x^2 + \left(v_y - \frac{E}{B}\right)^2 =$$

$$= \left(v_x^2 + v_y^2\right) - 2v_y\frac{E}{B} + \left(\frac{E}{B}\right)^2 = \left(\frac{E}{B}\right)^2$$

(мы использовали уравнения (1) и (2)). Подставляя в это уравнение выражения (5) и (6) для v_x и $\tilde{v}_y$, получим уравнение траектории:

$$\left(x - \frac{mE}{qB^2}\right)^2 + \tilde{y}^2 = \left(\frac{mE}{qB^2}\right)^2.$$

Из этого уравнения следует, что в системе отсчета, движущейся со скоростью $V = \frac{E}{B}$ вдоль оси Y, частица движется со скоростью V по окружности радиусом $R = \frac{mV}{qB} = \frac{mE}{qB^2}$, центр которой расположен на оси X на расстоянии R от начала координат. Через время $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi m}{qB}$ частица вернется на ось Y (в этот момент $x = 0$) и остановится. Траектория частицы совпадает с траекторией точки на ободе катящегося колеса, т.е. представляет собой так называемую циклоиду. Шаг циклоиды (расстояние между точками остановки) равен $2\pi R$.

Замечание. Объяснение полученному результату дает электродинамика специальной теории относительности. Там доказывается, что при переходе в указанную систему отсчета поля преобразуются так, что электрическое поле полностью исчезает и происходит движение по окружности в магнитном поле.

В последней задаче мы рассмотрим движение в магнитном поле двух заряженных частиц, взаимодействующих друг с другом.

Задача 8 (олимпиада «Ломоносов-2009»). *Две частицы одной и той же массы m, заряды которых равны по модулю, но противоположны по знаку, находятся в однородном магнитном поле с индукцией B в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, на расстоянии L друг от друга. Частицы одновременно отпускают. Найдите минимальное расстояние между частицами.*

Решение. Введем оси координат так: ось X направим от положительно заряженной частицы к отрицательно заряженной частице, ось Y – перпендикулярно оси X в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, в направлении отклонения частиц в начале движения (рис.6). Частицы движутся навстречу друг другу и отклоняются магнитным поле в одном направлении, так что отрезок, соединяющий частицы, остается все время параллельным оси X.

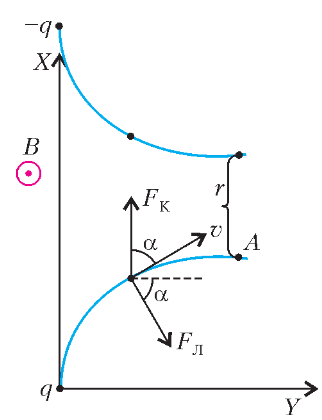


Рис. 6

Запишем, например, для положительно заряженной частицы второй закон Ньютона в проекции на ось Y (см. рис.6):

$$m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = qvB\cos\alpha = qv_xB .$$

Умножая на Δt и суммируя, получим $mv_y = qxB$, или, выразив координату частицы x через расстояние между частицами, −

$$mv_y = \frac{q(L-r)B}{2} . \qquad (7)$$

В момент, когда расстояние между частицами минимально (точка A), $v_x = 0$, и уравнение (7) принимает вид

$$mv = \frac{q(L-r)B}{2} . \qquad (8)$$

Поскольку сила Лоренца работу не совершает, закон сохранения энергии запишем в виде

$$-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + 2\frac{mv^2}{2} . \qquad (9)$$

Подставив сюда v из уравнения (8), после преобразований получим уравнение

$$r^2 - Lr + \frac{m}{\pi\varepsilon_0 LB^2} = 0 . \qquad (10)$$

Это уравнение имеет два положительных корня:

$$r = \frac{L}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\varepsilon_0 B^2 L^3}}\right).$$

Возникает вопрос: какой же из корней правильный? При заданном L решение существует в следующем диапазоне значений B:

$$B_0 \le B \le \infty \text{, где } B_0 = \sqrt{\frac{4m}{\pi\varepsilon_0 L^3}} .$$

При $B < B_0$ корни отсутствуют, что означает, что минимального расстояния не существует, т.е. частицы обязательно столкнутся друг с другом. А при $B \to \infty$ минимальное расстояние должно стремиться не к нулю, а к L. Таким образом, правильным является больший корень

$$r = \frac{L}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\varepsilon_0 B^2 L^3}}\right).$$

Но вот что выглядит удивительным и непонятным: при $B = B_0$, когда дискриминант равен нулю, минимальное расстояние между частицами равно $L/2$. Следовательно, минимальное расстояние между частицами никогда не может быть меньше $L/2$! Чтобы понять, почему так происходит, выразим проекцию скорости на ось X из закона сохранения энергии (9) и уравнения (7):

$$v_x^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 rm} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 Lm} - v_y^2 =$$

$$= \frac{q^2(L-r)}{4\pi\varepsilon_0 rLm} - \frac{q^2(L-r)^2B^2}{4m^2} = \frac{q^2B^2}{4m^2}\frac{(L-r)}{r}\left(r^2 - Lr + \frac{m}{\pi\varepsilon_0 LB^2}\right).$$

Примерный график зависимости v_x^2 от r изображен на рисунке 7 для трех случаев: $B > B_0$, $B = B_0$ и $B < B_0$. Выражение в последних скобках совпадает с левой частью уравнения (10); точки пересечения графика с абсциссой совпадают с корнями этого уравнения. Частицы движутся в области от L до большего корня r; в области между корнями движение невозможно, поэтому область от меньшего корня до нуля недостижима. При $B < B_0$ расстояние между частицами уменьшается от L до нуля (частицы сталкиваются).

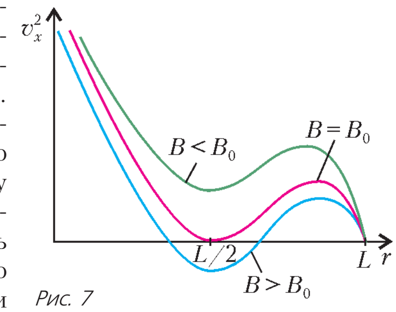


Рис. 7

Упражнения

1. Электрон влетает со скоростью v в область пространства, где созданы параллельные друг другу магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ и электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, под углом α к линиям полей. При каких α частица вернется в начальную точку?

2. Грузик с массой m и зарядом q, подвешенный на невесомой нити, находится в вертикальном магнитном поле с индукцией B. Грузик дважды приводят во вращение в горизонтальной плоскости, причем радиусы вращения в обоих случаях одинаковы, а направления вращения противоположны. На сколько отличаются угловые скорости этих вращательных движений?

3. Частица с зарядом q движется равномерно и прямолинейно в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ и магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, линии которых взаимно перпендикулярны. Кроме того, на частицу действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$. Найдите модуль и направление скорости частицы.

4. Маленький шарик с зарядом q, подвешенный на длинной нити в горизонтальном магнитном поле с индукцией B, совершает колебания в плоскости, перпендикулярной вектору индукции. Силы натяжения нити при прохождении шариком нижней точки в разных направлениях отличаются на ΔT. На сколько крайнее положение шарика выше нижнего?

Где проходит ватерлиния?

(Начало см. на с. 26)

воду, в результате чего уровень воды в сосуде поднимется на x, а верхняя поверхность бруска опустится на y. Можно показать, что суммарная потенциальная энергия воды и бруска изменится при этом на

$$\Delta W = g\left(x^2\left(\frac{\rho_0 S}{2s}(S-s)\right) - x\left(\rho h(S-s)\right)\right).$$

Выражение в скобках достигает минимума при $x = x_{\min} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{s}{S}h$. При этом, соответственно, $y = y_{\min} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{S-s}{S}h$. Таким образом, расстояние от нижней поверхности бруска до ватерлинии (черная жирная прямая на рисунке) равно

$$d = x_{\min} + y_{\min} = \frac{\rho}{\rho_0}h .$$

Разумеется, полученная формула совпадает с той, которую можно было бы вывести, применяя закон Архимеда.

К.Богданов